

問題 1

直線 $2x + y + 2 = 0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 $P(-3, 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

解答

点 Q の座標を (p, q) とする。

[1] 直線 ℓ の傾きは $\ell: y = -2x - 2$ より -2

直線 PQ の傾きは $\frac{q-1}{p+3}$

$PQ \perp \ell$ であるから

$$\frac{q-1}{p+3} \times (-2) = -1$$

傾き = $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$

ゆえに $2(q-1) = p+3$

よって $p - 2q + 5 = 0 \dots \textcircled{1}$

[2] 線分 PQ の中点 $\left(\frac{-3+p}{2}, \frac{1+q}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$2 \times \frac{-3+p}{2} + \frac{1+q}{2} + 2 = 0$$

点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ の中点は

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

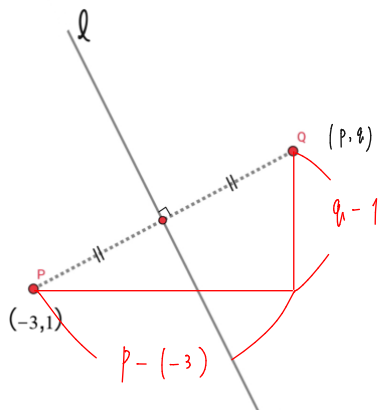
ゆえに $2(-3+p) + 1+q+4=0$

よって $2p + q - 1 = 0 \dots \textcircled{2}$

① ②を用いて、 p, q についての連立方程式を解くと

$$p = -\frac{3}{5} \quad q = \frac{11}{5}$$

したがって求める点 Q の座標は $\left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right) \dots \text{(答)}$



セルレク Point

1. (傾き) $\times$ (傾き) = -1

2. 線分 PQ の中点が直線 ℓ 上にある

1:30 1:00 0:40 0:26 0:05

(例) → $\frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \dots, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \dots, \frac{1}{28}$

① ② ③ ④ ⑤

問題 2

2 次方程式 $x^2 + kx - k + 3 = 0$ の解を判別せよ。(k は定数)

解答

判別式

与えられた 2 次方程式の判別式を D とする。

$$\begin{aligned} D &= k^2 - 4 \times 1 \times (-k + 3) \\ &= k^2 + 4k - 12 \\ &= (k + 6)(k - 2) \end{aligned}$$

削ぎ落とすときは
具体的な式は言わない。

(i) $D > 0$

すなわち $k < -6, 2 < k$ の時 異なる 2 つの実数解を持つ

(ii) $D = 0$

すなわち $k = -6, 2$ の時 重解を持つ

(iii) $D < 0$

すなわち $-6 < k < 2$ の時 異なる 2 つの虚数解を持つ (解なし)

セルレク Point

1. $D = b^2 - 4ac$

2. (i) $D > 0$ → 異なる 2 つの実数解を持つ

(ii) $D = 0$ → 重解を持つ

(iii) $D < 0$ → 異なる 2 つの虚数解を持つ

問題 3

$$\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-z}{4} = \frac{4z-3x}{8} (\neq 0) \text{ の時 } \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} \text{ の値を求めよ。}$$

解答

$$\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-z}{4} = \frac{4z-3x}{8} = k \text{ と置く。 } (k \neq 0)$$

変形させると

$$2x - y = 5k \quad \dots \textcircled{1}$$

$$3y - z = 4k \quad \dots \textcircled{2}$$

$$4z - 3x = 8k \quad \dots \textcircled{3}$$

となる

① ②③を連立させ x, y, z をそれぞれ k で表すと

$$x = 4k, y = 3k, z = 5k \text{ となる}$$

よって

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{4k \cdot 3k + 3k \cdot 5k + 5k \cdot 4k}{(4k)^2 + (3k)^2 + (5k)^2} = \frac{47k^2}{50k^2} = \frac{47}{50} \quad \dots \text{(答)}$$

① 比例式 = k と置き、
 x, y, z を k で表す

② ⑤式を k で表し、
変形して値を
求める。

セルレク Point

1. 比例式 = k と置く

2. x, y, z をそれぞれ k で表す

問題 4

2 次関数 $y=2x^2-8x+9$ のグラフは、2 次関数 $y=2x^2+12x+17$ のグラフをどのように平行移動したもののか。

解答

2 つの関数のグラフは、ともに $y=2x^2$ のグラフを平行移動したものであり、平行移動によって重ね合わせることができる。

$y=2x^2-8x+9$ を平方完成すると

$$y=2(x-2)^2+1$$

よって、この放物線の頂点を A とすると、A (2, 1)

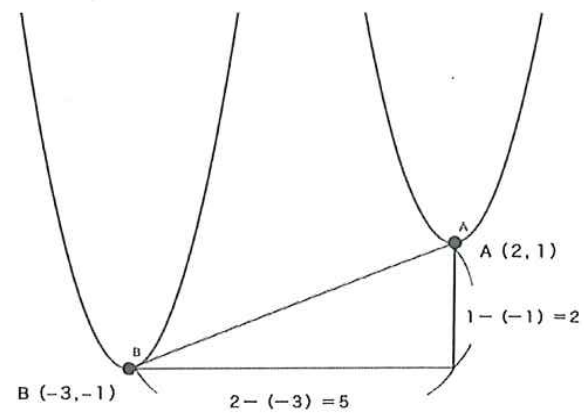
$y=2x^2+12x+17$ を平方完成すると

$$y=2(x+3)^2-1$$

よって、この放物線の頂点を B とすると、B (-3, -1)

点 A は、点 B を x 軸方向に $2-(-3)=5$

Y 軸方向に $1-(-1)=2$



だけ移動したものである。

したがって、 $(x, y) = (5, 2)$ 平行移動したものである。

・・・(答)

セルレク Point

1. 平方完成することで、頂点を求める
2. 2 つの頂点座標の比較

問題 5

$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ を満たす自然数 x, y の値の組を全て求めよ。

解答

与式を変形させると

$$4y - 4x = xy$$

$$xy + 4x - 4y = 0$$

$$(x-4)(y+4) + 16 = 0$$

$$(x-4)(y+4) = -16$$

(←両辺に $4xy$ を掛けて)

$() \times () = \text{整数}$
の利用

x, y は自然数であるから $x-4, y+4$ は整数である

また、 $x \geq 1, y \geq 1$ であるから $x-4 \geq -3, y+4 \geq 5$

ゆえに

$$(x-4, y+4) = (-2, 8), (-1, 16)$$

$$(x, y) = (2, 4), (3, 12) \quad \dots (\text{答})$$

グラフから問われていることを考えると

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{4}$$

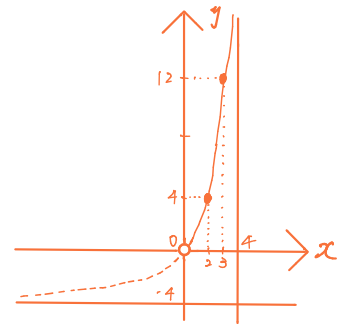
$$= \frac{4-x}{4x} \quad \text{より}$$

$$y = \frac{4x}{4-x}$$

$$= \frac{-4(4-x)+16}{4-x}$$

$$= \frac{16}{4-x} - 4$$

$$= -\frac{16}{x-4} - 4$$



セルレク Point

1. $() \times () = (\text{整数})$ の形に持ち込む

問題 6

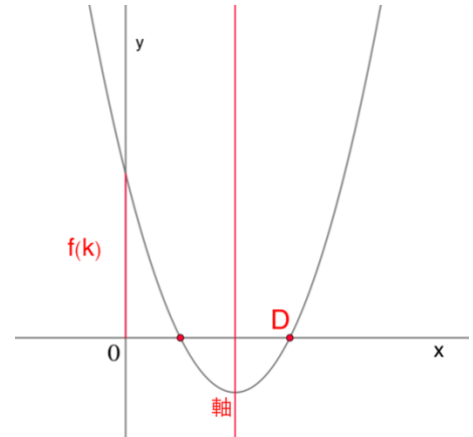
2 次方程式 $x^2 - 2(3m - 1)x + 9m^2 - 8 = 0$ が異なる 2 つの正の解を持つような定数 m の値の範囲を求めよ。

解答

$f(x) = x^2 - 2(3m - 1)x + 9m^2 - 8$ とし、
 $f(x) = 0$ の判別式を D とする。

異なる二つの正の解を持つための条件は、
 $y = f(x)$ のグラフが x 軸のせいの部分と、
異なる 2 点で交わることである。

ゆえに、次の①②③が同時に成り立つ。



① $\frac{D}{4} = \{-(3m - 1)\}^2 - 1 \cdot (9m^2 - 8) > 0$ すなわち $-6m + 9 > 0 \quad \dots \textcircled{1}$

② 軸 $x = 3m - 1$ について $3m - 1 > 0 \quad \dots \textcircled{2}$

③ $f(0) = 9m^2 - 8 > 0 \quad \dots \textcircled{3}$

① から $m < \frac{3}{2}$ ② から $m < \frac{3}{2}$ ③ から $m < -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} < m$

共通範囲を求めて $\frac{2\sqrt{2}}{3} < m < \frac{3}{2} \quad \dots \text{(答)}$

セルレク Point

1. 解の存在範囲は、判別式 D 、軸の位置、 $f(k)$ を考える

問題 7

(1) $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}, y = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ の時、 $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ の値を求めよ。

(2) $x > 1$ で $x + \frac{1}{x} = 5$ の時、 $x - \frac{1}{x}$ の値を求めよ。

解答

(1)

$$x+y = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{4}{2^2-(\sqrt{3})^2} = 4$$

$$xy = \frac{1}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{2^2-(\sqrt{3})^2} = 1$$

したがって

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{(x+y)^2 - 2xy} = \frac{4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4}{4^2 - 2 \cdot 1} = \frac{52}{14} = \frac{26}{7} \dots (\text{答})$$

(2)

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ の利用

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4x \cdot \frac{1}{x} = 5^2 - 4 \cdot 1 = 21$$

$x > 1$ より $x + \frac{1}{x} = 5$ であるから $x - \frac{1}{x} = \sqrt{21} \dots (\text{答})$

セルレク Point

1. 計算は、式変形のやり方をセルレクする
2. 基本対称式 $x+y$ xy で表す
3. 公式は、口頭で瞬時に言えるようにする

問題 8

$a > 0, b > 0$ の時、不等式 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right) \geq 16$ を証明せよ。

解答

左辺を展開して

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right) = \underline{ab} + \underline{\frac{9}{ab}} + 10$$

$ab > 0, \frac{9}{ab} > 0$ であるから (相加平均) $\geq$ (相乗平均) により

$$ab + \frac{9}{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{9}{ab}} = 2 \cdot 3 = 6$$

ただし、等号成立は

$ab = \frac{9}{ab}$ から $ab = 3$ のとき成立

よって

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right) = ab + \frac{9}{ab} + 10 \geq 6 + 10 = 16 \quad \dots (\text{終})$$

セルレク Point

1. $a > 0, b > 0$ の時 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $a = b$ の時等号成立

問題 9

$\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。ただし、整数 n について、 n^2 が 3 の倍数ならば n は 3 の倍数であることを用いてよい。

解答

$\sqrt{3}$ が無理数でない、すなわち有理数であると仮定すると

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \cdots \textcircled{1} \quad (a, b \text{ は互いに素の自然数})$$

と表される。

①を $a=b\sqrt{3}$ と変形して、両辺を平方すると

$$a^2 = 3b^2 \cdots \textcircled{2}$$

したがって、 a^2 は3の倍数であるから、 a も3の倍数である。

よって、 $a=3k$ (k は自然数) と表されるから、②より

$$(3k)^2 = 3b^2 \quad \text{すなわち} \quad b^2 = 3k^2$$

ゆえに、 b^2 は3の倍数であるから、 b も3の倍数である。

これは、 a, b が互いに素であることに矛盾する。

したがって、 $\sqrt{3}$ は無理数である。 $\cdots$ (終)

セルレク Point

1. 直接も対偶もダメな場合は、背理法で求める

問題 10

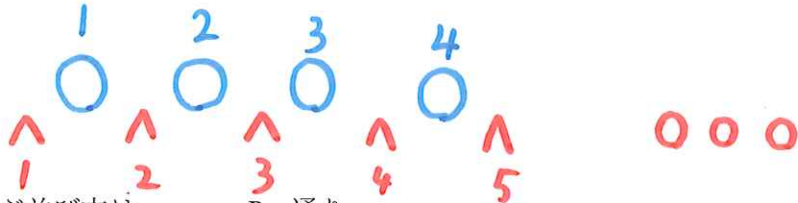
男子 4 人、女子 3 人がいる。次の並び方は何通りあるか。

(1) どの 2 人の女子も隣り合わないように 7 人が 1 列に並ぶ。

(2) 女子の両隣には男子が来るように 7 人が円周上に並ぶ

解答

(1)



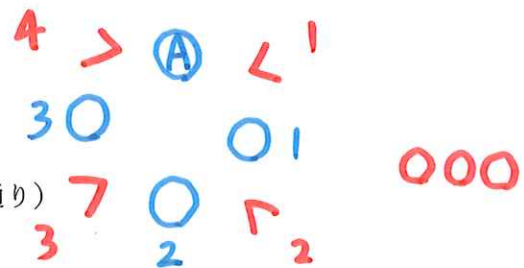
まず、男子 4 人が 1 列に並ぶ並び方は ${}_4P_4$ 通り

次に、男子 4 人の両端とその間の 5 ヶ所に女子 3 人を入れる方法は ${}_5P_3$ 通り

よって、求める並び方は

$${}_4P_4 \times {}_5P_3 = 4! \times 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1440 \text{ (通り)} \quad \dots \text{(答)}$$

(2)



まず、男子 4 人が円周上に並ぶ方法は $(4-1)!$ (通り)

次に、男子と男子の間の 4 か所に女子 3 人を 1 人ずつ入れる方法は ${}_4P_3$ 通り

よって、求める並び方は

$$(4-1)! \times {}_4P_3 = 6 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 = 144 \text{ (通り)} \quad \dots \text{(答)}$$

セルレク Point

1. 隣接しないものは 後から間または両端にいれる
2. 円順列の公式は $(n-1)!$

問題 11

未知数の範囲は必ず"チェック!"

2つの曲線 $y=x^3+ax$ と $y=bx^2+c$ ($b \neq 0$) が点 $(-1, 0)$ で接するとき、定数 a, b, c の値を求め、また、その接線の方程式を求めよ。

★微分は図示!

慣れてきたら、具体値は読まずに
解法に直接関係するところだけ音読する

解答

$$f(x) = x^3 + ax$$

・ x に具体値も代入するため

$$g(x) = bx^2 + c$$

・ $y = (x \text{ の多項式})$ を
いちいち表記するのは大変
→ $y = f(x), y = g(x)$ と
書くほうが簡潔!

とすると、

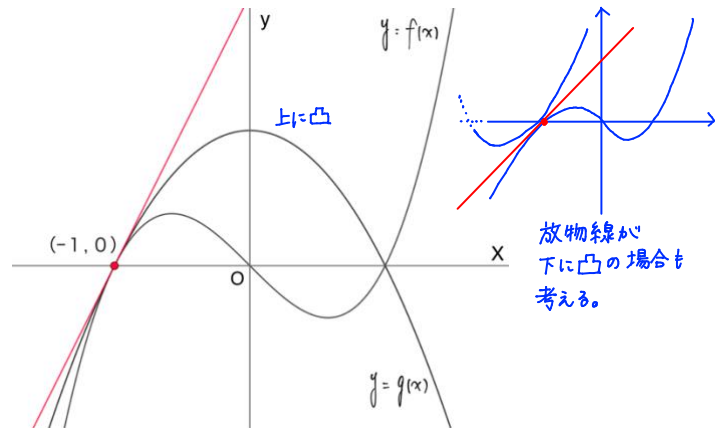
$$f'(x) = 3x^2 + a$$

← 共通の点で接する
= 共通の接線を持つ

$$g'(x) = 2bx$$

2つの曲線が点 $(-1, 0)$ を通り、

この点で共通の接線を持つための条件は



$$f(-1) = 0$$

$x = -1$ での $f(x)$ のみ座標は 0 (点 $(-1, 0)$ を通るため。 $g(-1) = 0$ も同じ理由)

$$f(-1) = g(-1)$$

2直線とも点 $(-1, 0)$ を通る → $f(-1) = g(-1)$

$$f'(-1) = g'(-1)$$

共通接線を持つ → 接線の傾きが同じなため $f'(-1) = g'(-1)$

したがって $x = -1$ を各式に代入して、

a, b, c の連立方程式を解く

$$-1 - a = 0$$

$$b + c = 0$$

$$-6b + 9 > 0$$

これを解くと $a = -1, b = -1, c = 1$... (答)

また、共通の接線の方程式は $f'(x)$ または $g'(x)$ に $x = -1$ を代入して、接線の傾きを求める。

傾きの値を代入し、点 $(0, -1)$ を通る直線を求める。

$$y - 0 = 2\{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = 2x + 2 \quad \dots (答)$$

セルレク Point

1. 共接条件

$$f(p) = g(p)$$

$$f'(p) = g'(p)$$

問題 1 2

曲線 $y=x^2$ ($-2 \leq x \leq 2$) と直線 $y=x+2, x=-2$ で囲まれた 2 つの部分の面積を求めよ。

解答

★積分(特に面積)も
図示せよ!

曲線と直線の交点の x 座標は

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$x = -1, 2$ 」 $\frac{1}{2}$ (例) → 理解できた所まで
印を書いておく

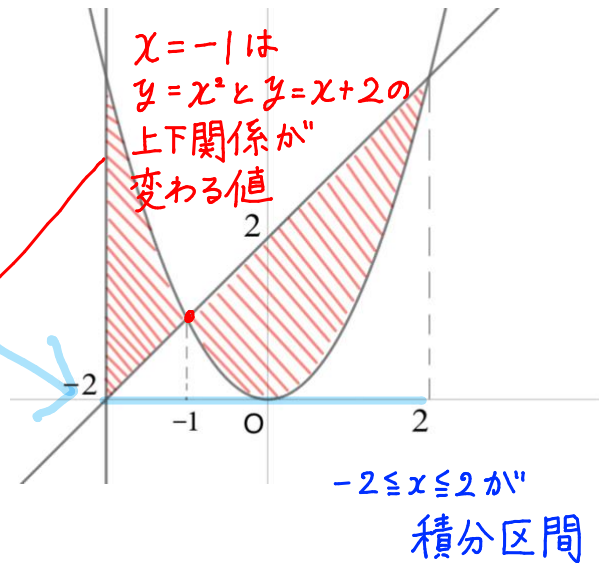
よって、求める面積 S は

$$S = \int_{-2}^{-1} \{x^2 - (x+2)\} dx + \int_{-1}^2 \{(x+2) - x^2\} dx$$

$$S = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2) dx - \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx$$

$$S = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{-1} - \int_{-1}^2 (x+1)(x-2) dx$$

$$S = \left(\frac{7}{3} + \frac{3}{2} - 2 \right) - \left(-\frac{1}{6} \right) \{2 - (-1)\}^3 = \frac{19}{3} \quad \dots (\text{答})$$



$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

※「 $\frac{1}{6}$ 公式」と呼ばれます。気になる人は
各自のバイブル本をチェック!

セルレク Point

1. グラフを書く
2. 積分区間を決める。
3. グラフの上下関係を調べる。
4. 計算