

漸化式のパターン網羅 NO.1

～ 思考の出発は この漸化式が 等比型なのか？ 等差型なのか？ を見極める ～

① $a_{n+1} = Aa_n + B$ 型

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 2 \quad (a_1 = 3) \\ x &= 2x + 2 \text{ を両辺から引くと} \\ a_{n+1} - x &= 2(a_n - x) \text{ となる。} \\ \therefore x &= -2 \text{ より} \\ \frac{a_{n+1} + 2}{2} &= \frac{a_n + 2}{2} \\ b_{n+1} &= 2b_n \quad (\text{等比型}) \end{aligned}$$

② $a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, a_{n+1} = 4a_n + 6 \cdot 2^n \\ 2^{n+1} \text{ で割ると} \\ \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} &= \frac{4 \cdot a_n}{2 \cdot 2^n} + \frac{6}{2} \cdot \frac{2^n}{2^n} \\ &= 2 \cdot \frac{a_n}{2^n} + 3 \\ \frac{a_n}{2^n} &= b_n \text{ とおくと} \\ b_{n+1} &= 2b_n + 3 \text{ となり, ①型となる} \\ &\text{よって ①へ} \end{aligned}$$

③ $a_{n+1} = Aa_n + Bn + C$ 型

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_{n+1} = 2a_n + 2n - 2 \\ \{a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta\} &= 2\{a_n + \alpha n + \beta\} \text{ --- (i)} \\ \text{これを展開すると} \\ a_{n+1} &= 2a_n + \alpha n + (\beta - \alpha) \text{ となる} \\ \text{もとの式と係数比較すると} \\ \alpha &= 2 \quad \beta - \alpha = -2 \quad \beta = 0 \\ \text{これらを (i) に代入すると} \\ \frac{a_{n+1} + 2(n+1)}{2} &= \frac{a_n + 2n}{2} \\ b_{n+1} &= 2b_n \\ &\text{等比型の形を作った!!} \end{aligned}$$

④ $a_{n+1} = \frac{Aa_n}{Ba_n + C}$ 型

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{3 - a_{n-1}} \\ \text{両辺逆数をとると} \\ \frac{1}{a_n} &= \frac{3 - a_{n-1}}{a_{n-1}} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{a_{n-1}} - 1 \\ b_n &= 3b_{n-1} - 1 \text{ とおけるから} \\ &\text{①型の解き方へ} \end{aligned}$$

等比型の場合

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= r a_n \\ \text{という形を作ることを} \\ &\text{ゴールにして} \\ a_n &= r^{n-1} \cdot a_1 \\ \text{の形に一般化する} \end{aligned}$$

等差型の場合

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= d \\ \text{という形にして} \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &\text{と一般化する} \end{aligned}$$

⑧ $Aa_n a_{n+1} = Ba_{n+1} + Ca_n$ 型

$$\begin{aligned} 9a_n a_{n+1} &= a_n - 2a_{n+1}, a_1 = 1 \\ \text{両辺を } a_n a_{n+1} \text{ で割ると} \\ 9 &= \frac{1}{a_{n+1}} - 2 \cdot \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_n} &= b_n \text{ とおくと} \\ 9 &= b_{n+1} - 2b_n \\ b_{n+1} &= 2b_n + 9 \rightarrow \text{①型へ} \end{aligned}$$

⑤ 3項間の漸化式の解法

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, a_2 = 4, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \\ a_{n+2} &= x^2, a_{n+1} = x, a_n = 1 \text{ とおくと} \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ (x-2)(x-3) &= 0 \\ x &= 2, 3 \\ (a_{n+2} - 2a_{n+1}) &= 3(a_{n+1} - 2a_n) \text{ --- ①} \\ (a_{n+2} - 3a_{n+1}) &= 2(a_{n+1} - 3a_n) \text{ --- ②} \\ \text{①より } (a_{n+2} - 2a_{n+1}) &= 3^n(a_2 - 2a_1) \\ &= 3^n \cdot 2 \text{ --- ①'} \\ \text{②より } (a_{n+2} - 3a_{n+1}) &= 2^n(a_2 - 3a_1) \\ &= 2^n \text{ --- ②'} \\ \text{①' - ②' より } a_{n+1} &= 3^n \cdot 2 - 2^n \\ a_n &= 3^{n-1} \cdot 2 - 2^{n-1} \\ n=1 \text{ のとき } a_1 &= 1 \text{ は成り立つので} \\ a_n &= 3^{n-1} \cdot 2 - 2^{n-1} \end{aligned}$$

⑥ S_n と a_n を含む漸化式

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= a_n \quad (n \geq 2) \text{ という関係式を用いて, } S_n \text{ か } a_n \text{ のどちらかを消去} \\ S_n &= -7 + 2n - a_n \text{ のとき } a_n \text{ を求める} \\ S_n &= -7 + 2n - a_n \text{ --- ①} \\ S_{n-1} &= -7 + 2(n-1) - a_{n-1} \text{ --- ②} \\ S_n - S_{n-1} &= a_n \text{ に ①, ② を代入して} \\ a_n, a_{n-1} \text{ の式にして漸化式を解く} \end{aligned}$$

⑦ $a_{n+1} - a_n = f(n)$

$$\begin{aligned} \text{階差数列は両辺に和をとる} \\ a_1 &= 1, a_{n+1} = a_n + 3n^2 - 4n \\ a_{n+1} - a_n &= 3n^2 - 4n \text{ --- ①} \\ \text{①の両辺に和をとると} \\ \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=1}^n (3k^2 - 4k) \\ a_{n+1} - a_1 &= 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ \text{ここから } a_{n+1} &\text{ を } a_n \text{ の形にする。} \end{aligned}$$

⑨ $a_{n+1} = f(n)a_n$ 型

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \frac{n+2}{n} a_n \\ \frac{a_{n+1}}{n+2} &= \frac{a_n}{n} \\ \frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)} &= \frac{a_n}{(n+1)n} \\ \text{よって } \frac{a_n}{(n+1)n} &= b_n \text{ とおくと} \\ b_{n+1} &= b_n \text{ となる。} \\ \text{これは等比型なので} \\ b_n &= 1^{n-1} \cdot b_1 \\ a_n &= n(n+1) \cdot \frac{1}{2} \text{ となる。} \\ n=1 \text{ のとき } a_1 &= 1 \text{ と成り立つ。} \\ \therefore a_n &= \frac{1}{2} n(n+1) \end{aligned}$$

漸化式のゴールは
nの大きい方
= nの小さい方
という関係性にした。
だから n+2 で割る。

このままでは、漸化式の
関係性になっていないので
n+1 で割る。

⑩ 指数の入った漸化式

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{5}, a_n = \sqrt{a_{n-1}} \quad (n \geq 2) \text{ のとき } a_n \\ a_n &= \sqrt{a_{n-1}} \text{ --- ①} \\ \text{①の両辺に } \log \text{ をとると} \\ \log a_n &= \log \sqrt{a_{n-1}} \\ &= \log (a_{n-1})^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log a_{n-1} \text{ --- ②} \\ \log a_n &= b_n \text{ とおくと} \\ b_n &= \frac{1}{2} b_{n-1} \\ b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2} \log 5\right) \\ &= \log 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \log a_n &= \log 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ a_n &= 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ n=1 \text{ のとき } a_1 &= 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \text{ となり成り立つ} \\ \text{よって } a_n &= 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

※ ⑤⑨⑩ 以外の問題の解答の続きは
No.2にあるのでそちらを確認してください。

この10パターンは、この紙がなくても全部暗記して、
頭の中でイメージできるまで何度も反復しよう。

漸化式のパターン網羅 NO.1

～ 思考の出発は この漸化式が 等比型なのか？ 等差型なのか？ を見極める ～

① $a_{n+1} = Aa_n + B$ 型

$$a_{n+1} = 2a_n + 2 \quad (a_1 = 3)$$

等比型の場合

等差型の場合

⑧ $Aa_n a_{n+1} = Ba_{n+1} + Ca_n$ 型

$$9a_n a_{n+1} = a_n - 2a_{n+1}, \quad a_1 = 1$$

② $a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n + 6 \cdot 2^n$$

⑤ 3項間の漸化式の解法

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

⑨ $a_{n+1} = f(n)a_n$ 型

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$$

③ $a_{n+1} = Aa_n + Bn + C$ 型

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2n - 2$$

⑥ S_n と a_n を含む漸化式

$$S_n = -7 + 2n - a_n \text{ のとき } a_n \text{ を求める}$$

⑩ 指数の入った漸化式

$$a_1 = \sqrt{5}, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}} \quad (n \geq 2) \text{ のとき } a_n$$

④ $a_{n+1} = \frac{Aa_n}{Ba_n + C}$ 型

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{3 - a_{n-1}}$$

⑦ $a_{n+1} - a_n = f(n)$

階差数列は両辺に和をとる

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 - 4n$$

※ ⑤ ⑨ ⑩ 以外の問題の解答の続きは
No.2にあるのでそちらを確認してください。

この10パターンは、この紙がなくても全部暗記して、
頭の中でイメージできるまで何度も反復しよう。

漸化式のパターン網羅 NO.2

NO.1のプリントで紹介した漸化式の解答と別解についての補足です。

①の続き

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_n \\ b_n &= 2^{n-1} \cdot b_1 \\ a_{n+2} &= 2^{n-1} \cdot (a_1 + 2) \\ a_n &= 5 \cdot 2^{n-1} - 2 \\ n=1 \text{ のとき } a_1 &= 3 \text{ となり成り立つ} \\ \therefore a_n &= 5 \cdot 2^{n-1} - 2 \end{aligned}$$

②の続き

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_n + 3 \\ x &= 2x + 3 \\ x &= -3 \\ \therefore (b_{n+1} + 3) &= 2(b_n + 3) \\ b_n + 3 &= 2^{n-1}(b_1 + 3) \\ \frac{a_n}{2^n} + 3 &= 2^{n-1}(\frac{2}{2} + 3) \\ \frac{a_n}{2^n} &= 2^{n-1} - 3 \\ a_n &= 2^{2n+1} - 3 \cdot 2^n \\ n=1 \text{ のとき } a_1 &= 2 \text{ となり成立する} \\ \therefore a_n &= 2^{2n+1} - 3 \cdot 2^n \end{aligned}$$

③の続き

$$\begin{aligned} a_{n+1} + 2(n+1) &= 2(a_n + 2n) \\ b_n &= a_n + 2n \text{ とおく} \\ b_{n+1} &= 2b_n \\ b_n &= 2^{n-1}b_1 \\ a_n &= 2^{n-1}(a_1 + 2) - 2n \\ &= 2^n - 2n \\ n=1 \text{ のとき } a_1 &= 0 \text{ となり成り立つ} \\ \therefore a_n &= 2^n - 2n \end{aligned}$$

④の続き

$$\begin{aligned} b_n &= 3b_{n-1} - 1 \\ x &= 3x - 1 \\ -2x &= -1 \\ x &= \frac{1}{2} \\ b_n - \frac{1}{2} &= 3(b_{n-1} - \frac{1}{2}) \\ b_n &= 3^{n-1}(b_1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a_n} &= 3^{n-1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ a_n &= \frac{2}{3^{n-1} + 1} \\ n=1 \text{ のとき } a_1 &= 1 \text{ が成り立つので} \\ a_n &= \frac{2}{3^{n-1} + 1} \end{aligned}$$

⑤は、NO.1のまま

⑥の続き

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= a_n \text{ の式に ①, ② を代入すると} \\ -7 + 2n - a_n + 7 - 2(n-1) + a_{n-1} &= a_n \\ -2a_n &= -a_{n-1} - 2 \\ a_n &= \frac{1}{2}a_{n-1} + 1 \\ x &= \frac{1}{2}x + 1 \\ \frac{1}{2}x &= 1 \\ x &= 2 \\ (a_n - 2) &= \frac{1}{2}(a_{n-1} - 2) \\ a_n - 2 &= (\frac{1}{2})^{n-1}(a_1 - 2) \\ \text{ここで } S_1 &= a_1 \text{ より} \\ \text{① から } S_1 &= a_1 = -7 + 2 - a_1 \\ 2a_1 &= -5 \\ a_1 &= -\frac{5}{2} \\ \therefore a_n - 2 &= (\frac{1}{2})^{n-1}(-\frac{9}{2}) \\ a_n &= -9(\frac{1}{2})^n + 2 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

これは $a_1 = -\frac{5}{2}$ も満たしているの、 $n \geq 1$ としてOK

※ 解答の最後で $n=1$ のときを実際に代入して検算しています。
これは、漸化式が $a_{n+1} = \Delta a_n$ のように2項間の関係式から一般項 a_n を求めるため、初項のみのとき(言い換えると2項間の関係式が成り立たない) a_n がちゃんと与えられた a_1 と一致するか確認する作業が必要となります。

⑧の続き

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_n + 9 \\ x &= 2x + 9 \\ -x &= 9 \\ x &= -9 \\ b_{n+1} + 9 &= 2(b_n + 9) \\ b_n &= 2^{n-1}(b_1 + 9) - 9 \\ \frac{1}{a_n} &= 2^{n-1} \cdot 10 - 9 \\ a_n &= \frac{1}{5 \cdot 2^{n-9}} \\ n=1 \text{ のとき } a_1 &= 1 \text{ となり成立するので} \\ a_n &= \frac{1}{5 \cdot 2^{n-9}} \end{aligned}$$

⑨、⑩はNO.1のままでOK

⑦の続き

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - 2n(n+1) + 1 \\ a_n &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{2} - 2(n-1) \cdot n + 1 \\ &= \frac{1}{2}(2n^3 - 7n^2 + 5n + 2) \\ n=1 \text{ のとき } a_1 &= 1 \text{ となり成立する} \\ a_n &= \frac{1}{2}(2n^3 - 7n^2 + 5n + 2) \end{aligned}$$

(階差型の別解)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 3n^2 - 4n \\ a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 - 4k) \quad (n \geq 2) \\ &= 1 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 4 \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 1 + 3 \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} - 4 \frac{(n-1) \cdot n}{2} \\ &= \frac{1}{2}(2n^3 - 7n^2 + 5n + 2) \end{aligned}$$

$n=1$ のとき $a_1 = 1$ となり成立するので

$$a_n = \frac{1}{2}(2n^3 - 7n^2 + 5n + 2)$$

このように数列の差が変数で表されるのは階差数列

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad \dots \quad a_n$
 $+b_1 \quad +b_2 \quad +b_3 \quad +b_4 \quad +b_5 \quad \dots \quad +b_{n-1}$ となっている
 よって $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$
 初項は a_1 、 b_k という数列に $k=1$ から $n-1$ まで代入して足したものを表すことができる。